Fonctions affines

1. Définition

Exemple : ***Au vidéo-Club***

En achetant une carte d'abonnement annuelle qui coûte 5 €, chaque DVD loué coûte 2 €.

On note x le nombre de DVD loués.
g désigne la fonction qui à x associe le prix payé (en €) si on est abonné. $g(x) = 2x + 5$

Définition

« a et b » sont des nombres relatifs fixés.

Une ***fonction affine*** est un processus qui à un nombre x associe le nombre ax + b.

$f : x \longmapsto ax + b$ $\quad$ $f(x) = ax + b$

Exemple: $f : x \longmapsto -2x + 4$ $\quad$ *La fonction f est une fonction affine.*

Exemple: $g : x \to 2x + 5$ $\quad$ *g est la fonction affine qui modélise la situation ci-dessus.*
$a = 2$ $\quad$ $b = 5$

Cas particuliers: Si $b = 0$, $f(x) = ax$ f est une fonction linéaire de coefficient a.

Exemple: $h(x) = 2x + 0 = 2x$ *h est la fonction linéaire de coefficient 2.*

Si $a = 0$, $f(x) = b$ f est une fonction constante.

Exemple: $k(x) = 0x + 5 = 5$ k *est la fonction constante de valeur 5.*

2. Image et antécédent

On considère la fonction f définie par: $f : x \to -2x + 4$

L'image de 5 par la fonction f est : $f(5) = -2 \times 5 + 4$ $\quad$ $f(5) = -6$

L'image de 0 par la fonction f est : $f(0) = -2 \times 0 + 4$ $\quad$ $f(0) = 4$

<table>
<tr><td colspan="2">On cherche x tel que :</td></tr>
<tr><td>$f(x) = 0$
$-2x + 4 = 0$
$-2x = 0 - 4$
$-2x = -4$
$x = \frac{-4}{-2}$
$x = 2$ solution unique.

L'antécédent de 0 est 2.</td><td>$f(x) = 2$
$-2x + 4 =$
$-2x = 2 - 4$
$-2x = -2$
$x = 1$ solution unique.

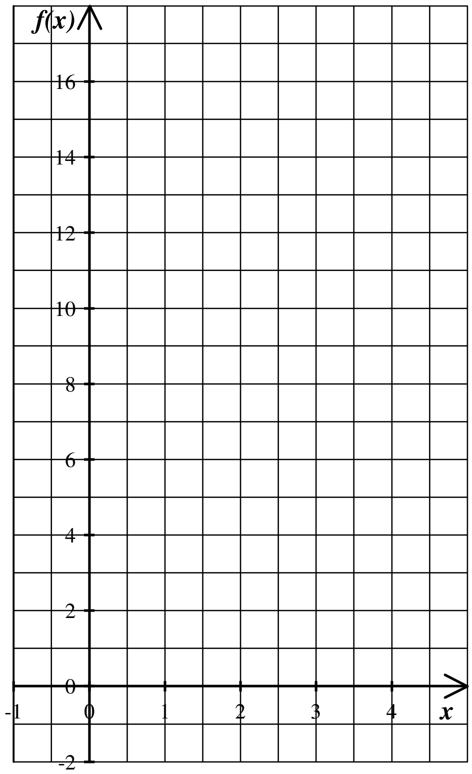
L'antécédent de 2 est 1.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Remarque:
Pour un nombre donné, il n'existe qu'un seul antécédent, par une fonction affine.</td></tr>
</table>

x	**0**	**5**		
f(x)			**0**	**2**

3. Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ est une **droite**.

« a » est appelé ***pente*** ou ***coefficient directeur*** de la droite.
« b » est appelé ***ordonnée à l'origine.***



On note (d) la représentation graphique de la fonction f.

Dans un repère, un point M (x ; y) appartient à la droite (d) si et seulement si $y = a\,x + b$

On dit que la droite (d) a pour équation $y = a\,x + b$

Exemple: Soit f la fonction affine $f : x \longmapsto -2x + 4$

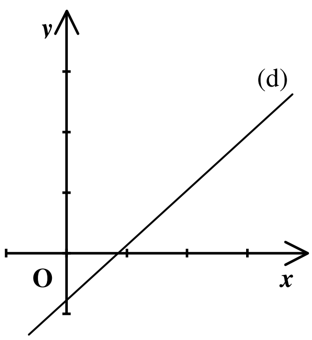
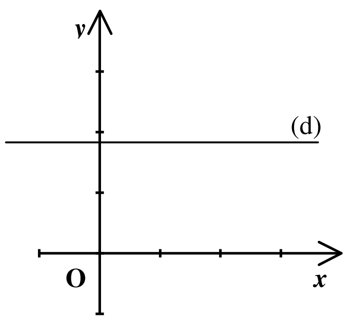
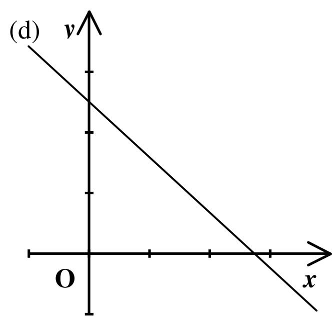
f(0) = 4
f(2) = 0

Les points M (0 ;4) et N (2 ; 0) appartiennent à la droite (d).

Ordonnée à l'origine

x	0	2		
$f(x)$	4			

4. Fonction croissante ; fonction décroissante

fonction *croissante* si $a > 0$	fonction *constante* si $a = 0$	fonction *décroissante* si $a < 0$
 (d) « monte »	 (d) est parallèle à l'axe [Ox)	 (d) « descend »

5. Expression algébrique d'une fonction linéaire

Trouver ***l'expression algébrique*** d'une fonction affine f, c'est trouver la valeur de « a » dans l'expression $f(x) = a\,x + b$

Exemple

f est une fonction affine. Trouver l'expression de f, sachant que :
les points M (3 ; 5) et N (-2 ; -10) appartiennent à la représentation graphique de f.

Par le calcul

On a : f (3) = 5 donc $3a + b = 5$ et f (-2) = -10 donc $-2a + b = -10$

On calcule la pente « a » et l'ordonnée à l'origine « b ».

$$\boldsymbol{a} = \frac{\text{f}\,(3) - \text{f}\,(\text{-}2)}{3 - (\text{-}2)}$$

différence des ordonnées

différence des abscisses

$$\boldsymbol{a} = \frac{5 - (\text{-}10)}{3 - (\text{-}2)}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{5 + 10}{3 + 2}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{15}{5}$$

$\boldsymbol{a} = 3$

f $(x) = \mathbf{3}x + b$

N est un point de la droite, donc ses coordonnées vérifient l'équation

f $(3) = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \times 5 + \boldsymbol{b} = 5$

$9 + \boldsymbol{b} = 5$

$\boldsymbol{b} = 5 - 9$

$\boldsymbol{b} = \text{-}4$

donc, f$(x) = \mathbf{3}x \mathbf{- 4.}$

Par lecture graphique

La fonction s'écrit: f $(x) = ax$ – b

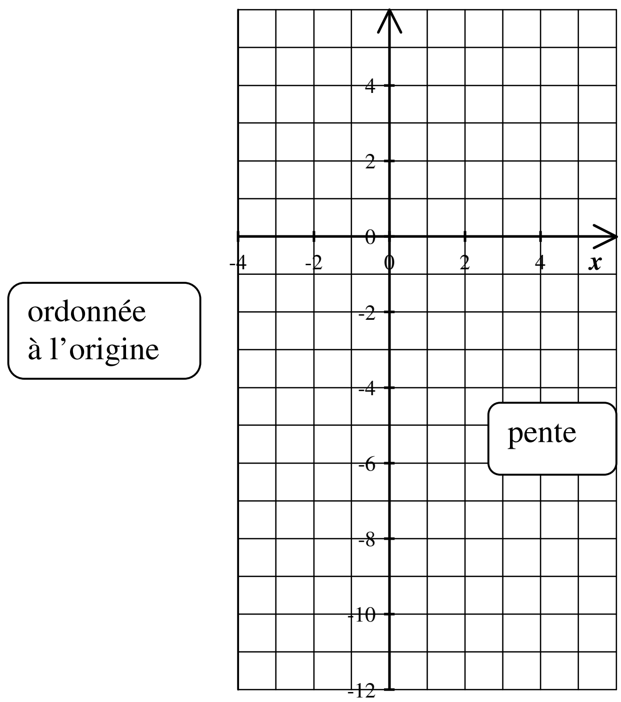
$$\text{pente « } a \text{ »} = \frac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$$

$$a = \frac{3}{1}$$

$a = 3$

ordonnée à l'origine « b » = -4

donc, f$(x) = \mathbf{3}x \mathbf{- 4.}$



Si on veut...	**Penser à ...**
1. Prouver, à partir d'un tableau de valeurs, qu'une fonction est linéaire	démontrer que ce tableau est un tableau de proportionnalité
2. Calculer l'image d'un nombre par une fonction linéaire ou affine f donnée	Remplacer x par ce nombre dans l'expression de f(x)
3. Trouver un nombre dont on connaît l'image par une fonction affine f donnée	Résoudre l'équation f(x) = $ax + b$ d'inconnue x, connaissant a, b et f(x)
4. Représenter graphiquement une fonction affine f donnée	Remplacer x par deux valeurs particulières et tracer la droite passant par les deux points de coordonnées (x ;f(x)) ainsi obtenus
5. Déterminer une fonction affine f, connaissant son ordonnée à l'origine, un nombre et son image.	Résoudre l'équation f(x) = $ax + b$ d'inconnue a, connaissant les valeurs de b, x et f(x).
6. Déterminer une fonction affine f, connaissant deux nombres et leurs images	Calculer a par les accroissements finis. Calculer b en résolvant une équation.
7. Déterminer une fonction affine f à partir de sa représentation graphique.	Lire les coordonnées de deux points distincts appartenant à la représentation graphique et appliquer la méthode du 6.

Fonctions affines

1. Définition

« a et b » sont des nombres relatifs fixés.

Une ***fonction affine*** est un processus qui à un nombre x associe le nombre ax + b.

$f : x \longmapsto ax + b$ $\quad$ $f(x) = ax + b$

Exemple: $\quad f : x \longmapsto -2x + 4$ $\quad$ La fonction f est une fonction affine.

Cas particuliers:

Si $b = 0$, $\quad f(x) = \ldots\ldots$. $\quad$ f est une fonction …………….……… de coefficient ……

Si $a = 0$, $\quad f(x) = \ldots\ldots$ $\quad$ f est une fonction ……………………..

2. Image et antécédent

On considère la fonction f définie par: $\quad f : x \rightarrow -2x + 4$

L'image de 5 par la fonction f est : $\quad$ f(5) = ……………….. $\quad$ f(5) = …….

L'image de 0 par la fonction f est : $\quad$ f(…..) = ……………….. $\quad$ f(…...) = …….

<table>
<tr><td colspan="2">On cherche x tel que :</td></tr>
<tr><td>$f(x) = 0$

L'antécédent de 0 est ……..</td><td>$f(x) = 2$

L'antécédent de 2 est …….</td></tr>
<tr><td colspan="2">Remarque:
Pour un nombre donné, il n'existe qu'un seul antécédent, par une fonction affine.</td></tr>
</table>

x				
$f(x)$				

5. Expression algébrique d'une fonction linéaire

Trouver ***l'expression algébrique*** d'une fonction affine f, c'est trouver la valeur de « a » dans l'expression $f(x) = a\,x + b$

Exemple : $\quad$ f est une fonction affine. Trouver l'expression de f, sachant que les points : M (3 ; 5) et N (-2 ; -10) appartiennent à la représentation graphique de f.

3. Représentation graphique

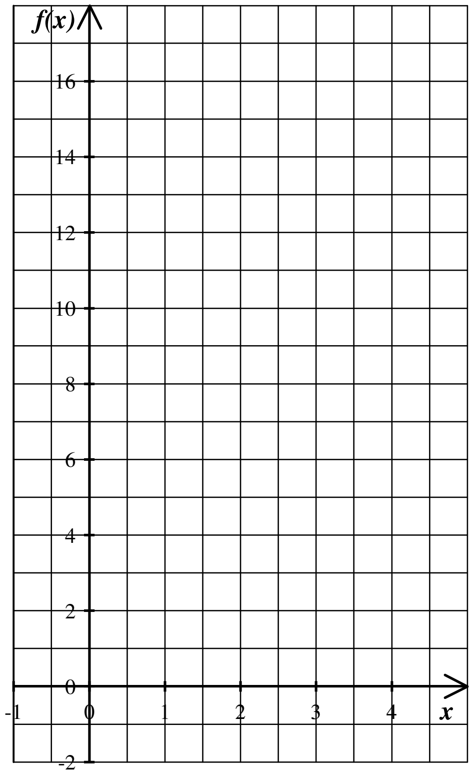
La représentation graphique d'une fonction affine f : $x \longmapsto ax + b$ est une **droite**.

« a » est appelé ***pente*** ou ***coefficient directeur*** de la droite.
« b » est appelé ***ordonnée à l'origine.***

On note (d) la représentation graphique de la fonction f.

Dans un repère, un point M (x ; y) appartient à la droite (d) si et seulement si $y = a\,x + b$

On dit que la droite (d) a pour équation $y = a\,x + b$



Exemple: Soit f la fonction affine f : $x \longmapsto -2x + 4$

f(…..) = …..

f(…..) = …..

Les points M (….. ;…..) et N (….. ; …..) appartiennent à la droite (d).

Ordonnée à l'origine

x				
$f(x)$				

Si on veut…	**Penser à …**
1. Prouver, à partir d'un tableau de valeurs, qu'une fonction est linéaire	démontrer que ce tableau est un tableau de proportionnalité
2. Calculer l'image d'un nombre par une fonction linéaire ou affine f donnée	Remplacer x par ce nombre dans l'expression de f(x)
3. Trouver un nombre dont on connaît l'image par une fonction affine f donnée	Résoudre l'équation f(x) = $ax + b$ d'inconnue x, connaissant a, b et f(x)
4. Représenter graphiquement une fonction affine f donnée	Remplacer x par deux valeurs particulières et tracer la droite passant par les deux points de coordonnées (x ;f(x)) ainsi obtenus
5. Déterminer une fonction affine f, connaissant son ordonnée à l'origine, un nombre et son image.	Résoudre l'équation f(x) = $ax + b$ d'inconnue a, connaissant les valeurs de b, x et f(x).
6. Déterminer une fonction affine f, connaissant deux nombres et leurs images	Calculer a par les accroissements finis. Calculer b en résolvant une équation.
7. Déterminer une fonction affine f à partir de sa représentation graphique.	Lire les coordonnées de deux points distincts appartenant à la représentation graphique et appliquer la méthode du 6.